الأنظمة العددية

١. مجموعات الأعداد

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عده مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها وقد سبق للطالب دراستها في مراحل التعليم العام وفيما يلي تذكير وتأصيل هذه المجموعات.

١,١. مجموعة الأعداد الطبيعية

وهي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N :

$$N = \{1,2,3,4...........\}$$

٢,١. مجموعة الأعداد الكلية

وما هي إلا مجموعة الأعداد الطبيعية N مضافا إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W. وبمعنى آخر $W = N \cup \{0\}$ وتصبح:

$$W = \{0,1,2,3,4,.......\}$$

٣,١. مجموعة الأعداد الصحيحة

بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعة W نحصل على مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بالحرف Z ، إذا:

$$Z = \{.......-2,-1,0,1,2.......\}$$

٤,١. مجموعة الأعداد النسبية

وهي المجموعة التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط أن لا يساوي المقام فيها الصفر ونرمز لها بالحرف Q. وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z, n \neq 0\right\}$$

نلاحظ هنا أن أي عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر بحيث يكون المقام في هذا الكسر العدد ١ ، فمثلا $\frac{-2}{1} = -2$ وبشكل أعم $m = \frac{m}{1}$.

عند هذه النقطة نلاحظ أن N مجموعة جزئية من W و W مجموعة جزئية من Z و Z مجموعة جزئية من Q ، أي باستخدام رمز الاحتواء لدينا : $N \subset W \subset Z \subset Q$

الفصل الأول

المجموعات

١. تعريف المجموعة

نعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تميزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه. فمثلا لتكن المجموعات التالية:

a) مجموعة الأعداد $2, 4, 6, 8, 10$.

b) مجموعة الإثني عشر شهرا في السنة.

c) مجموعة الأعداد الكبيرة.

d) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.

في هذا مثال نعتبر a) و b) مجموعتين لأن عناصرها معروفة ومحددة أما بالنسبة للمجموعتين c) و d) فلا نعتبرهما رياضيا مجموعتين لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى آخر فإذا عناصر c) و d) غير معروفة ومحددة وبالتالي لا نعتبرها مجموعتين. عندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نفهم ضمنا أننا نعني مجموعة رياضية.

٢,١. رموز المجموعات وعناصرها

عادة ما نرمز للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A, B, X, Y ... الخ بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a, b, x, y ...الخ. وعادة ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع $\{\}$ وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $-2, 0, 1, \pi$ كالتالي: $A=\{-2,0,1,\pi\}$

٤,١. المجموعة الجزئية

نقول إن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A أو بمعنى آخر إن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A ونرمز لهذا كالتالي: $B \subseteq A$

ويمكن كتابة هذا رياضيا كالتالي:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$ ($\forall$: يقرأ مهما يكون)

إذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

مثال ١: لتكن المجموعات التالية: $C = \{3,11,12\}$ $B = \{5,24\}$ $A = \{3,5,11,24\}$

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة B و C مع A أن: $B \subset A$ و $C \not\subset A$

٦,١. المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلا يمكن أن نصنف على جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية. عادة ما نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية بالمجموعة الشاملة و نرمز لها بالرمز U. فمثلا تعتبر المجموعة $U=\{-5,2,7,21\}$ هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A=\{2,21\}$ و $B=\{-5,7,21\}$ لأن المجموعات A و B مجموعات جزئية من U.

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$. فمثلا المجموعة $A=\{x:x\neq x\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور. مفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى.

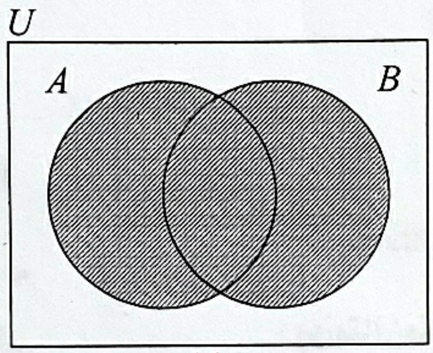
٢. العمليات على المجموعات

١,٢. اتحاد مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتين فإن اتحادهم هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في كل من A أ و B ونرمز لهذه العملية بالرمز $A\cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A\cup B=\{x : x\in A \text{ أو } x\in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بأشكال توضيحية تسمى أشكال فن حيث تمثل المجموعة الشاملة U بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون اتحادهم المنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم:



$A\cup B$

مثال ٣: لتكن المجموعتان $B=\{2,4,6\}$ $A=\{1,2,3,5\}$ إذا: $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

خصائص الاتحاد

$1)\ A\cup A=A$ $\quad$ $2)\ A\cup\phi=A$ $\quad$ $3)\ A\cup U=U$

$4)\ A\subseteq(A\cup B)\ ,\ B\subseteq(A\cup B)$ $\quad$ $5)\ A\cup B=B\cup A$ $\quad$ $6)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

الابدالية $\quad$ التجميعية

٢,٢. تقاطع مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتين فإن تقاطعهم هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز للتقاطع بالرمز $A\cap B$ ونعرفه كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

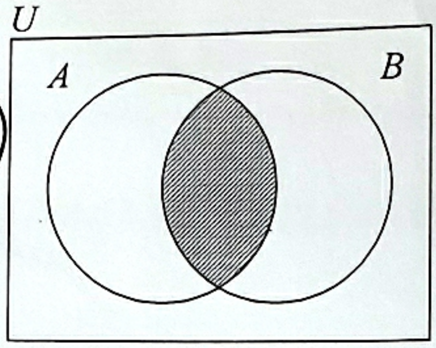
ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم

$A = \{6, 7, 8, \ldots\}$

$B = \{11, 12, \ldots\}$

$A \cap B = \{11, 12, \ldots\}$

$A \cap B = \{x : x \in N, x \geq 11\}$



[redacted] $A \cap B$ $B = \{0, 1, \ldots, 11\}$

مثال ٤: لتكن المجموعتين: $B = \{x : x \in N, x \geq 11\}$ $A = \{x : x \in N, x \geq 6\}$ إذا:

$$A \cap B = \{x : x \in N, x \geq 11\}$$

خصائص التقاطع

$1) A \cap A = A$ $\quad 2) A \cap \phi = \phi$ $\quad 3) A \cap U = A$

$4) (A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$ $\quad 5) A \cap B = B \cap A$ $\quad 6) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

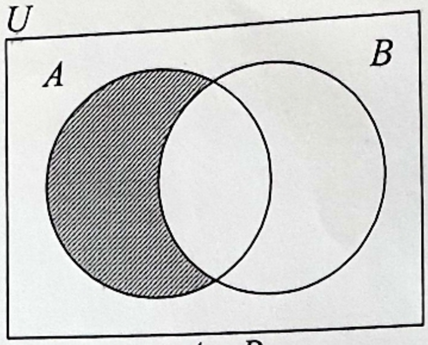
اد)

٤،٢. الفرق بين مجموعتين

نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A بأنه مجموعة العناصر التي هي موجودة في A وفي نفس الوقت ليست موجودة في B ويرمز لهذا الفرق بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A-B$

مثال ٥: لتكن المجموعتين: $B=\{3,6,12,18,20\}$ $A=\{1,5,6,12,20\}$ إذا: $A-B=\{1,5\}$

خصائص الطرح

1) $A-A=\phi$

2) $A-\phi=A$

3) $A-U=\phi$

4) $A-B=B-A\Leftrightarrow A=B$

5) $A-B=A\Leftrightarrow A\bigcap B=\phi$

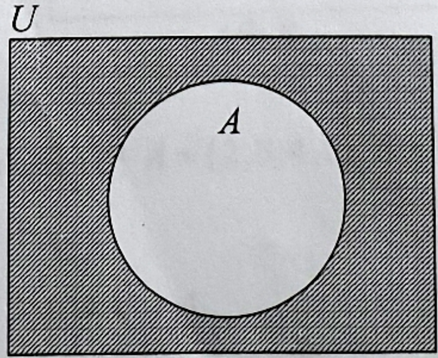
6) $A-B=\phi\Leftrightarrow A\subseteq B$

٥,٢. متممة المجموعة

إذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A، نعرف متممة A بأنها مجموعة العناصر الموجودة في U وفي نفس الوقت ليست موجودة في A (أي بمعنى أخر $U-A$). ونرمز لمتممة A بالرمز $\overline{A}$ وتكون:

$$\overline{A}=U-A=\{x : x\in U \text{ و } x\notin A\}$$

وتمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$\overline{A}$

مثال ٦: لتكن المجموعتين: $A=\{1,2,3\}$ $U=N=\{1,2,3,4.....\}$ إذا: $\overline{A}=\{4,5,6.....\}$

خصائص المتممة

1) $\overline{A}\cup A=U$

2) $\overline{A}\cap A=\phi$

3) $\overline{\phi}=U$

4) $\overline{U}=\phi$

5) $\overline{\overline{A}}=A$

6) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{A}\subseteq B$

الفصل الثاني : المشتقات

أساسيات المشتقات

- اذا كان لدينا المتغير y فان مشتقة y

رمز المشتقة $\Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$

قواعد المشتقة :

① مشتقة الثابت : يساوي صفر (الثابت يعني رقم) .

عدد ثابت $\Leftarrow y = c$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$ صفر

② مشتقة دالة : اذا كانت لدينا $\boxed{y = x}$ فان قاعدة المشتقة يساوي ١ .

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 1}$$

مثال :

$$y = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 10$$

③ مشتقة دالة مرفوعة الى قوة (أُس) :

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

المشتقة

مثال :-

$$y = x^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10\,x^{10-1}$$

$$= 10\,x^{9}$$

②

مثال

④ مشتقة حاصل جمع أو طرح دالتين :

$$y = 9x^2 + 4x^3 + 3x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 18x^{2-1} + 12x^{3-1} + 3$$

$$y' = 18x + 12x^2 + 3$$

⑤ مشتقة حاصل ضرب دالتين :

(الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية) + (الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى)

مثال :

$$y = \underbrace{4x}_{\text{الدالة الأولى}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{الدالة الثانية}}$$

$$y' = \underbrace{4x}_{\text{دالة ①}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{مشتقة دالة ②}} + \underbrace{3x^2}_{\text{دالة ②}} \cdot \underbrace{4}_{\text{مشتقة دالة ①}}$$

$$= 24x^2 + 12x^2$$

$$y' = 36x^2$$

⑥ مشتقة حاصل قسمة دالتين :

$$\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

مثال

$$y = \frac{(4x^2 + 3x)}{(2x+1)}$$

$$y' = \frac{(2x+1)(8x+3) - (4x^2+3x)(2)}{(2x+1)^2} \Leftarrow$$

عملية توزيع وفك الأقواس

$$= \frac{16x^2 + 6x + 8x + 3 - 8x^2 + 6x}{(2x+1)^2}$$

$$y' = \frac{8x^2 + 8x + 3}{(2x+1)^2}$$

7) مشتقة دالة للدالة x

$$\boxed{x = y' \cdot u'}$$

حل

$$y = 2u^2 + 5$$

$$u = 3x^3 - 7$$

$$x = y' \cdot u'$$

$$y = 2u^2 + 5 \Longrightarrow y' = 4u$$

$$u = 3x^3 - 7 \Longrightarrow u' = 9x^2$$

$$x = y' \cdot u'$$

$$x = (4\underbrace{u}_{\text{تعويض دالة } u}) \cdot (9x^2)$$

$$x = 4(3x^3 - 7) \cdot 9x^2$$

$$= (12x^3 - 28) \cdot 9x^2$$

$$x = 108x^5 - 252x^2$$

عشان الضرب بجمع الاسس

③

A مشتقة القوس مرفوع الى قوة (أس):

الاس * (القوس مطروح من الاس ١) * (مشتقة داخل القوس)

مثال

$$y = (3X^2 - 2X)^{-2}$$

$$y' = -2(3X^2 - 2X)^{-2-1} \cdot (6X - 2)$$

$$y' = -2(3X^2 - 2X)^{-3} \cdot (6X - 2)$$

A مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

$$y' = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة نفسها}}$$

مثال

$$y = Log(2X + 3)$$

$$y' = \frac{2}{(2X + 3)}$$

مشتقة الدالة ⟸ 2

مثال

$$y = Log(4X^2 + 3X)$$

$$y' = \frac{(8X + 3)}{(4X^2 + 3X)}$$

١-١ الاس :

ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو :

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdots x$$

x مضروبة في نفسها n من المرات

بينما $x^0 = 1$

مثال

① $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

② $(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$

③ $2^2 = 2 \times 2 = 4$

٢- الدوال الاسية :

ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي x فأن الدالة الأسية ذات الاساس b هي على الشكل التالي :

$$Y = \underbrace{f(x)}_{\text{دالة}} = \underbrace{b}_{\text{أساس}}{}^{x} \leftarrow \text{أس}$$

مثال : حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية :

① $y = f(x) = 2^{x}$

② $y = f(x) = 4^{x^2}$

الحل :

① الأساس هو 2 الأس $= x$

② الأساس هو 4 الأس $= x^2$

الفصل الثالث

التكامل : Integration

* يمكن أن نعرف التكامل بأنه عملية عكسية للتفاضل (الاشتقاق).

* أن التفاضل هو عملية أو مؤثر عكس التكامل.

ويوجد نوعان من التكاملات:

① التكامل غير المحدد ② التكامل المحدد.

* في التكامل المحدد يجب إضافة ثابت التكامل وعادة ما يرمز له بالرمز c

قانون التكامل

$$\boxed{\underbrace{\int}_{\text{رمز التكامل}} a\,dX = aX + \underbrace{c}_{\text{ثابت التكامل}}}$$

أساسيات التكامل:

$$\boxed{1-\ \int a\,dx = aX + c}$$

مثال:-

① $\int 4\,dx = 4X + C$

② $\int -2\,dX = -2X + C$

③ $\int \frac{3}{5}\,dX = \frac{3}{5}X + C$

$$\boxed{2-\ \int X^n\,dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C}$$

تكامل متغير مرفوع لأس قوة (أس) نضيف للقوة 1 ونقسمها على الأس الجديد

مثال ١ $\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$

$$= \frac{x^4}{4} + C$$

مثال : $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

نفتح الجذر التربيعي

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\boxed{3-\ \int a x^n\,dx = a\int x^n\,dx = a\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

تكامل متغير مرفوع لأي قوة مضروب في رقم = نخرج الرقم خارج التكامل وتكامل المتغير تكاملاً اعتيادياً

مثال : $\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx$

$$= 3\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + C$$

$$= \frac{3x^5}{5} + C$$

$$4-\int (g(x))^n \cdot g'(x)\, dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

تكامل دالة . مضروبة في مشتقتها يساوي = الدالة نفسها نضيف الى الأس واحد + ثابت التكامل

مثال $\int \underbrace{(x^2+3)^4}_{} \cdot \underbrace{2x}_{\text{مشتقة داخل القوس}}\, dx$

مشتقة هذه الدالة هي $2x$

∴ المشتقة داخل القوس موجودة مباشرة نكامل القوس

الحل $\dfrac{(x^2+3)^{4+1}}{4+1} + C$

$$= \frac{(x^2+3)^5}{5} + C$$

مثال $\int (\underbrace{3x+5}_{})^6\, dx$

نلاحظ ان المشتقة داخل القوس غير موجودة وهي 3

الحل ∴ في هذه الحالة نوفر المشتقة وذلك بالضرب والقسمة على 3 كالاتي :

$$= \frac{1}{3}\int (3x+5)^6 \cdot \cancel{3}\, \cancel{dx}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+5)^{6+1}}{6+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+5)^7}{7} + C$$

$$= \frac{(3x+5)^7}{21} + C$$

خصائص التكامل :

$$1- \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

الخاصية الاولى هي تكامل حاصل جمع دالتين نوزع التكامل على الدالتين

مثال

$$\int [9x + 6x^2]\,dx$$

$$= \int 9x\,dx + \int 6x^2\,dx$$

$$= \frac{9x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{2+1}}{2+1} + C$$

$$= \frac{9x^2}{2} + \frac{6x^3}{3} + C$$

2- $\int [f(x) - g(x)] = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$

الخاصية الثانية: هي حاصل طرح دالتين ايضا نوزع التكامل على الدالتين.

$$\int [x^3 - x)\,dx = \int x^3\,dx - \int x\,dx.$$

$$\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$$

3- $\int \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

التكامل للكسر لا يساوي
التكامل للبسط والمقام

الفصل ~~الثالث~~ الرابع

المصفوفات والمحددات وتطبيقاتها الاقتصادية

أولاً. المصفوفات « Matrices »

المصفوفة عبارة عن مجموعة من الاعداد (او المتغيرات او المعالم) الموضوعة على شكل صفوف واعمدة منتظمة . ويسمى عدد صفوف واعمدة المصفوفة بابعاد المصفوفة (Dimensions) او رتبة المصفوفة بحيث يتقدم عدد الصفوف على عدد الاعمدة . وتتكون المصفوفة من متجهات صفية (Row vectors) واخرى عمودية (Column vectors) موضوعة بين قوسين من الشكل [ ] او ( )

يمكننا اعطاء تعريف مختصر للمصفوفات بأنها مجموعة اعداد مرتبة بشكل مستطيل محصورة بين قوسين او هي تركيبة رياضية مكونة من عناصر على شكل صفوف واعمدة محصورة بين قوسين مثل /

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

NO:
DATE:

يتضح من المصفوفات اعلاه بأن لها عدد من الصفوف rows وعدد من الاعمدة columns وان حاصل ضرب عدد الصفوف في الاعمدة يسمى مرتبة او درجة order

فالمصفوفة A ذات مرتبة او درجة 2*3
والمصفوفة B ذات مرتبة او درجة 3*3
والمصفوفة C ذات مرتبة او درجة 2*2

وبصورة عامة يمكن كتابة المصفوفة بالشكل الآتي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

اي ان عدد صفوف المصفوفة (m) وعدد اعمدة المصفوفة (n)

فتصبح درجة او مرتبة المصفوفة (m*n)

* بعض المصفوفات الخاصة

① المصفوفة الصفرية : هي المصفوفة التي يكون فيها كل عنصر من عناصرها يساوي صفر

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

② المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

③ مصفوفة الوحدة Unit Matrix : هي المصفوفة التي يكون كل عنصر في قطرها الرئيسي مساوياً للواحد الصحيح وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها I .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٤- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ما عدا عناصرها القطرية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

٥- المصفوفات المتساوية: يقال ان المصفوفة متساوية اذا توفر الشرطين التاليين.

أ- عندما تكون المصفوفة من نفس الدرجة

ب- عندما تكون العناصر متناظرة في المصفوفات متساوية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان المصفوفتان من نفس الدرجة $3 * 2$ وان كل عنصر من عناصر المصفوفة

A مساوي للعنصر المقابل في المصفوفة B

DATE:

العمليات الجبرية للمصفوفات

جمع المصفوفات

اذا كانت $[A]$ و $[B]$ من رتبة واحدة $m*n$ فان حاصل جمعهما $A+B$ لتكن C ذات رتبة $m*n$. اي لكي يتم جمع مصفوفتين لابد ان تكون من درجة واحدة حتى تقال لها متوافقة بالجمع.

مثال/ اذا كانت المصفوفتان A و B على الشكل الآتي
1/ ايجاد $A+B$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

نلاحظ بأنه A , B من مرتبة واحدة $2*2$ لذا فان

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+5 & 4+3 \\ 1+2 & 5+7 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال/

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & 3+7 & 5+4 \\ 1+3 & 0+5 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

NO:
DATE:

عملية طرح المصفوفات : هي عملية مشابهة لعملية جمع المصفوفات

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 5-3 & 4-2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

اذا كانت لدينا مصفوفتان B , A وكانت عدد اعمدة A يساوي عدد صفوف B لذا فان حاصل ضربهما AB ويساوي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد صفوف A وعدد اعمدتها يساوي عدد اعمدة B

مثال / اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

استخرج حاصل الضرب للمصفوفات AB , AC

$$A.B = \begin{bmatrix} 1*2+2*1 & 1*1+2*3 \\ 3*2+4*1 & 3*1+4*3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1*2+2*3 & 1*1+2*0 & 1*2+2*1 \\ 3*2+4*3 & 3*1+4*0 & 3*2+4*1 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 18 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

طرق حل المصفوفات :-

① طريقة معكوس المصفوفة (المحددات).

② طريقة كاوس.

مثال: أوجد ناتج

الطريقة الأولى (معكوس المصفوفة)

① نجد المحدد للمصفوفة | |

تغيير اماكن

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

② ايجاد مبدل المصفوفة ونرمز لها C .

③ تبديل أماكن عناصر القطر الرئيسي وتغيير اشارات عناصر القطر الثانوي

$$|A| = 12 - 35 = \underline{\underline{-23}}$$

$$C = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$

④ ايجاد أنفيرس (معكوس) A^{-1} :- يجاد عن طريق القانون التالي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, \underbrace{adj\, A}_{\text{مبدلة } A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-23} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{4}{-23} & \frac{-5}{-23} \\ \frac{-7}{-23} & \frac{3}{-23} \end{vmatrix}$$